CLAMFIM Bologna

Modelli 1 @ Clamfim

Equazioni differenziali del secondo ordine.

Introduzione alla misura di Lebesgue

29 settembre 2015

professor Daniele Ritelli

daniele.ritelli@unibo.it

$$\Delta = a^2 - 4b = 0:$$

$\Delta = a^2 - 4b = 0$:

$$\boldsymbol{y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}}$$

$\Delta = a^2 - 4b = 0$:

$$\boldsymbol{y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}}$$

ove λ è la sola soluzione dell'equazione caratteristica

Equazioni lineari non omogenee

La soluzione delle equazioni lineari non omogenee è connessa alla soluzione dell'omogenea associata. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni della non omogenea la differenza $y_{\mathrm{d}}(x) = y_1(x) - y_2(x)$ è soluzione dell'omogenea,

Equazioni lineari non omogenee

La soluzione delle equazioni lineari non omogenee è connessa alla soluzione dell'omogenea associata. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni della non omogenea la differenza $y_\mathrm{d}(x) = y_1(x) - y_2(x)$ è soluzione dell'omogenea, quindi la differenza $y_1(x) - y_2(x)$ è esprimibile come combinazione lineare di due soluzioni indipendenti dell'omogenea associata, soluzioni che siamo in grado di determinare risolvendo l'equazion caratteristica. Quindi ogni soluzione dell'equazione non omogenea ha struttura:

Equazioni lineari non omogenee

La soluzione delle equazioni lineari non omogenee è connessa alla soluzione dell'omogenea associata. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni della non omogenea la differenza $y_{\mathrm{d}}(x) = y_1(x) - y_2(x)$ è soluzione dell'omogenea, quindi la differenza $y_1(x) - y_2(x)$ è esprimibile come combinazione lineare di due soluzioni indipendenti dell'omogenea associata, soluzioni che siamo in grado di determinare risolvendo l'equazior caratteristica. Quindi ogni soluzione dell'equazione non omogenea ha struttura:

$$\boldsymbol{y(x) = s(x) + c_1 s_1(x) + c_2 s_2(x)}$$

Pertanto è fondamentale trovare una soluzione particolare (non importa) quale dell'equazione non omogenea per trovare tutte le soluzioni della stessa equazione

Pertanto è fondamentale trovare una soluzione particolare (non importa) quale dell'equazione non omogenea per trovare tutte le soluzioni della stessa equazione

È evidente che tutto dipende dal tipo di *termine noto* $u(x)$ in

Pertanto è fondamentale trovare una soluzione particolare (non importa) quale dell'equazione non omogenea per trovare tutte le soluzioni della stessa equazione

È evidente che tutto dipende dal tipo di *termine noto* $u(x)$ in

$$\boldsymbol{ay''(x) + by'(x) + by(x) = u(x)}$$

Polinomio di grado m.

$$u(x) = u_0\, x^m + u_1\, x^{m-1} + \cdots + u_{m-1}\, x + u_m$$

Polinomio di grado m.

$$u(x) = u_0\, x^m + u_1\, x^{m-1} + \cdots + u_{m-1}\, x + u_m$$

Si cerca una soluzione particolare dello stesso tipo

Polinomio di grado m.

$$u(x) = u_0\, x^m + u_1\, x^{m-1} + \cdots + u_{m-1}\, x + u_m$$

Si cerca una soluzione particolare dello stesso tipo

$$s(x) = s_0\, x^m + s_1\, x^{m-1} + \cdots + s_{m-1}\, x + s_m$$

Polinomio di grado m.

$$u(x) = u_0\, x^m + u_1\, x^{m-1} + \cdots + u_{m-1}\, x + u_m$$

Si cerca una soluzione particolare dello stesso tipo

$$s(x) = s_0\, x^m + s_1\, x^{m-1} + \cdots + s_{m-1}\, x + s_m$$

Esempio

Polinomio di grado m.

$$u(x) = u_0\, x^m + u_1\, x^{m-1} + \cdots + u_{m-1}\, x + u_m$$

Si cerca una soluzione particolare dello stesso tipo

$$s(x) = s_0\, x^m + s_1\, x^{m-1} + \cdots + s_{m-1}\, x + s_m$$

Esempio

$$y''(x) + 2\, y'(x) + y(x) = 3$$

Polinomio di grado m.

$$u(x) = u_0\, x^m + u_1\, x^{m-1} + \cdots + u_{m-1}\, x + u_m$$

Si cerca una soluzione particolare dello stesso tipo

$$s(x) = s_0\, x^m + s_1\, x^{m-1} + \cdots + s_{m-1}\, x + s_m$$

Esempio

$$y''(x) + 2\, y'(x) + y(x) = 3$$

Soluzione

Polinomio di grado m.

$$u(x) = u_0\, x^m + u_1\, x^{m-1} + \cdots + u_{m-1}\, x + u_m$$

Si cerca una soluzione particolare dello stesso tipo

$$s(x) = s_0\, x^m + s_1\, x^{m-1} + \cdots + s_{m-1}\, x + s_m$$

Esempio

$$y''(x) + 2\, y'(x) + y(x) = 3$$

Soluzione

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} x + 3$$

Connessione con l'equazione di Riccati

Sia

$$\boldsymbol{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0}$$

una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti variabili.

Connessione con l'equazione di Riccati

Sia

$$\boldsymbol{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0}$$

una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti variabili.

Introduciamo una nuova variabile $u = u(x)$ mediante la relazione

$$\boldsymbol{y = \exp\left(-\int u(x)\mathrm{d}x\right) = e^{-U(x)}}$$

Connessione con l'equazione di Riccati

Sia

$$\boldsymbol{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0}$$

una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti variabili.

Introduciamo una nuova variabile $u = u(x)$ mediante la relazione

$$\boldsymbol{y = \exp\left(-\int u(x)\mathrm{d}x\right) = e^{-U(x)}}$$

Pertanto

$$y' = -u\exp\left(-\int u(x)\mathrm{d}x\right) = -uE^{-U(x)}$$

derivando una seconda volta

$$y'' = -u' \exp\left(-\int u(x)\mathrm{d}x\right) + u^2 \exp\left(-\int u(x)\mathrm{d}x\right) = e^{-U(x)}\left(u^2 - u'\right)$$

derivando una seconda volta

$$y'' = -u' \exp\left(-\int u(x)\mathrm{d}x\right) + u^2 \exp\left(-\int u(x)\mathrm{d}x\right) = e^{-U(x)}\left(u^2 - u'\right)$$

Così l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti variabili è trasformata nell'equazione del primo ordine, ma non lineare:

$$e^{-U(x)}(u^2 - u') - P(x)ue^{-U(x)} + Q(x)e^{-U(x)} = 0$$

derivando una seconda volta

$$y'' = -u' \exp\left(-\int u(x)\mathrm{d}x\right) + u^2 \exp\left(-\int u(x)\mathrm{d}x\right) = e^{-U(x)}\left(u^2 - u'\right)$$

Così l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti variabili è trasformata nell'equazione del primo ordine, ma non lineare:

$$e^{-U(x)}(u^2 - u') - P(x)ue^{-U(x)} + Q(x)e^{-U(x)} = 0$$

Possiamo semplificare il fattore esponenziale ottenendo l'equazione per u

$$u' = Q(x) - P(x)u + u^2$$

che è una equazione di Riccati

Analogamente se è invece data l'equazione di Riccati

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

con la trasformazione

$$y = -\frac{w'}{c(x)w}$$

Analogamente se è invece data l'equazione di Riccati

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

con la trasformazione

$$y = -\frac{w'}{c(x)w}$$

troviamo

$$y' = \frac{wc'(x)w' - c(x)ww'' + c(x)w'^2}{c^2(x)w^2}$$

Analogamente se è invece data l'equazione di Riccati

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

con la trasformazione

$$y = -\frac{w'}{c(x)w}$$

troviamo

$$y' = \frac{wc'(x)w' - c(x)ww'' + c(x)w'^2}{c^2(x)w^2}$$

D'altra parte con il cambio di variabili il secondo membro della Riccati diviene

$$a(x) - \frac{b(x)w'}{c(x)w} + \frac{w^2}{c(x)w^2}$$

Da qui facendo i calcoli algebrici

$$\frac{-a(x)c^2w + b(x)c(x)w' + c'(x)w' - c(x)w''}{c^2w} = 0$$

Da qui facendo i calcoli algebrici

$$\frac{-a(x)c^2w + b(x)c(x)w' + c'(x)w' - c(x)w''}{c^2w} = 0$$

otteniamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$c(x)w'' - \left(b(x)c(x) + c'(x)\right)w' + a(x)c^2(x)w = 0$$

σ-algebre di insiemi

se $X \neq \emptyset$ una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice σ-algebra se

i) $\boldsymbol{\emptyset} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$

σ-algebre di insiemi

se $X \neq \emptyset$ una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice σ-algebra se

i) $\boldsymbol{\emptyset \in \mathcal{A}}$

ii) $\boldsymbol{A \in \mathcal{A} \implies A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}}$

σ-algebre di insiemi

se $X \neq \emptyset$ una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice σ-algebra se

i) $\boldsymbol{\emptyset \in \mathcal{A}}$

ii) $\boldsymbol{A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}}$

iii) $\boldsymbol{(A_n)_n \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}}$

Se $\mathcal{X}$ è una arbitraria collezione di sottoinsiemi di X indicata con $\mathcal{H}$ la famiglia di tutte le σ-algebre in X contenenti $\mathcal{X}$ si ha che

$$\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\right) = \bigcap_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \mathcal{H}} \boldsymbol{\mathcal{B}}$$

è una σ-algebra, detta σ-algebra generata da $\mathcal{X}$

Se $\mathcal{X}$ è la famiglia degli aperti in $\mathbb{R}$ la σ-algebra $\sigma(\mathcal{X})$ si chiama σ-algebra di Borel e la denotiamo con $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Un elemento di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è detto Boreliano

Se $\mathcal{I}$ è la famiglia di tutti gli intervalli $[a, b)$ con $a < b$ si dimostra che

$$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Se $\mathcal{X}$ è la famiglia degli aperti in $\mathbb{R}$ la σ-algebra $\sigma(\mathcal{X})$ si chiama σ-algebra di Borel e la denotiamo con $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Un elemento di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è detto Boreliano

Se $\mathcal{I}$ è la famiglia di tutti gli intervalli $[a, b)$ con $a < b$ si dimostra che

$$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Si genera la σ-algebra boreliana anche partendo dalle famiglie

$$\mathcal{I}_1 = \{(a, b) \mid a,\, b \in \mathbb{R},\, a < b\} \quad \mathcal{I}_2 = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{I}_3 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Misure Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che, se per ogni successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ di insiemi disgiunti tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ si ha

$$\boldsymbol{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)}$$

si chiama **misura** su $\mathcal{A}$

Misure Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che, se per ogni successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ di insiemi disgiunti tale che $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ si ha

$$\boldsymbol{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)}$$

si chiama **misura** su $\mathcal{A}$

- La terna $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ si chiama in tal caso **spazio di misura**

Misure Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che, se per ogni successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ di insiemi disgiunti tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ si ha

$$\boldsymbol{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{A_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A_n})$$

si chiama **misura** su $\mathcal{A}$

- La terna $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ si chiama in tal caso **spazio di misura**
- Se $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{1}$ la misura μ è detta **misura di probabilità**

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\boldsymbol{\mu(X) < +\infty}$

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\boldsymbol{\mu(X) < +\infty}$

- **$\boldsymbol{\sigma}$-finita** se esiste una successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ tale che $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\boldsymbol{\mu(X) < +\infty}$

- **$\boldsymbol{\sigma}$-finita** se esiste una successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ tale che $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

- **completa** se $A \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, $\mu(A) = 0 \implies B \in \mathcal{A}$ e quindi $\mu(B) = 0$

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\boldsymbol{\mu(X)} < +\infty$
- **$\boldsymbol{\sigma}$-finita** se esiste una successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- **completa** se $A \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, $\mu(A) = 0 \implies B \in \mathcal{A}$ e quindi $\mu(B) = 0$
- **concentrata** su un insieme $A \in \mathcal{A}$ se $\mu(A^c) = 0$. In tale caso si dice che A è un **supporto di $\boldsymbol{\mu}$**